Universidade de Mogi das Cruzes – UMC

Campos Villa Lobos

Cálculo Diferencial e Integral II
Parte I

Engenharia Civil *Engenharia Mecânica*

Profa. Marília Rocha – marilia@umc.br
1º semestre de 2015

ÍNDICE

1. Estudo da Variação das Funções

Segundo Iezzi, Murakami e Machado (1993), apresentamos as seguintes definições:

1.1. Máximo e Mínimo

1.1.1. Definições

1. Seja a função $f: D \to R$ e seja $x_o \in D$. Chamamos vizinhança de x_o um intervalo $V =]x_o - \delta, x_o + \delta[$, em que δ é um número real positivo.

2. Dizemos que x_o é um ponto de máximo local de f se existir uma vizinhança V de x_o, tal que: $(\forall x)(x \in V \Rightarrow f(x) \leq f(x_o))$ e nesse caso, o valor $f(x_o)$ é chamado máximo local de f.

3. Dizemos que x_o é um ponto de mínimo local de f se existir uma vizinhança V de x_o, tal que: $(\forall x)(x \in V \Rightarrow f(x) \geq f(x_o))$ e nesse caso, o valor $f(x_o)$ é chamado mínimo local de f.

4. Dizemos que x_o é um ponto extremo ou extemante de f se x_o for um ponto de máximo local ou de mínimo local de f. Nesse caso, o valor de $f(x_o)$ é chamado valor extremo de f.

5. Os pontos de máximo ou mínimo locais que não são extremos do intervalo em que a função está definida são chamados pontos de máximo e mínimo locais interiores.

6. Dizemos que $f(x_o)$ é um valor máximo absoluto de f se $f(x_o) \geq f(x)$ para todo x do domínio de f, isto é, $f(x_o)$ é o maior valor que f assume.

7. Dizemos que $f(x_o)$ é um valor mínimo absoluto de f se $f(x_o) \leq f(x)$ para todo x do domínio de f, isto é, $f(x_o)$ é o menor valor que f assume.

1.1.2. Teorema de Fermat

Se $f: D \to R$ é uma função derivável no ponto $x_o \in D$ e x_o é ponto extremo local interior de f, então $f'(x_o) = 0$.

Interpretação geométrica: num extremo local interior de uma função derivável f, a reta tangente ao gráfico de f é paralela ao eixo dos x.

1.2. Derivada – Crescimento e Decréscimo

1.2.1. Teorema de Rolle

Se f é uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$ e $f(a) = f(b)$, então existe ao menos um ponto $x_o \in]a,b[$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Interpretação Geométrica: se uma função é derivável em $]a,b[$ contínua em $[a,b]$ e assume valores iguais nos extemos do intervalo, então em algum ponto de $]a,b[$ a tangente ao gráfico de f é paralela ao eixo dos x.

1.2.2. Teorema de Lagrange ou Teorema do Valor Médio

Se f é uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$, então existe ao menos um ponto $x_o \in]a,b[$ tal que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$.

Interpretação geométrica: se f é função contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$, então existe um ponto $x_o \in]a,b[$ tal que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(x_o, f(x_0))$ é paralela à reta determinada pelos pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ por terem coeficientes angulares iguais.

1.2.3. Definições

1. Uma função $f: D \rightarrow R$ é <u>crescente</u> num intervalo I $(I \subset D)$ quando, qualquer que seja $x_1 \in I$, $x_2 \in I$, temos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

2. Uma função $f: D \rightarrow R$ é <u>decrescente</u> num intervalo I $(I \subset D)$ quando, qualquer que seja $x_1 \in I$, $x_2 \in I$, temos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

1.2.4. Teorema

Se f é uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$. Então:

- Se $f'(x) \geq 0$ em $]a,b[$ $\Leftrightarrow$ f é crescente em $[a,b]$.
- Se $f'(x) \leq 0$ em $]a,b[$ $\Leftrightarrow$ f é decrescente em $[a,b]$.

Interpretação geométrica:
1. Uma função f ser crescente em $[a,b]$, quando f é derivável, equivale a $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in]a,b[$, isto é, os coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico de f são positivos.
2. Uma função f ser decrescente em $[a,b]$, quando f é derivável, equivale a $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in]a,b[$, isto é, os coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico de f são negativos.

1.3. Determinação dos Extremantes

1.3.1. Análise da derivada primeira

Dada uma função f, definida e derivável em $I = [a,b]$ e dado $x_0 \in]a,b[$ tal que $f'(x_0) = 0$ temos:

- x_0 é ponto de máximo local de f se existir uma vizinhança V de x_0 tal que $f'(x)$ é positiva à esquerda e negativa à direita de x_0.

- x_0 é ponto de mínimo local de f se existir uma vizinhança V de x_0 tal que $f'(x)$ é negativa à esquerda e positiva à direita de x_0.
- x_0 não é extremante de f se existir uma vizinhança V de x_0 tal que para todo $x \in V$ e $x \neq x_0$ tem-se $f'(x)$ sempre com mesmo sinal.

1.3.2. Teorema

Seja f uma função contínua e derivável até segunda ordem no intervalo $I =]a,b[$, com derivadas f' e f'' também contínuas em I. Seja $x_0 \in I$ tal que $f'(x_0) = 0$. Nessas condições, temos:

- Se $f''(x_0) < 0$, então x_0 é ponto de máximo local de f.
- Se $f''(x_0) > 0$, então x_0 é ponto de mínimo local de f.

1.3.3. Critério geral para determinação de extremantes

Seja f uma função derivável com derivadas sucessivas também deriváveis em $I =]a,b[$. Seja $x_0 \in I$ tal que

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{n-1}(x_0) = 0 \text{ e } f^n(x_0) \neq 0$$

Nessas condições, temos:

I – se n é par e $f^n(x_0) < 0$, então x_0 é ponto de máximo local de f.

II – se n é par e $f^n(x_0) > 0$, então x_0 é ponto de mínimo local de f.

III – se n é impar, então x_0 não é ponto de máximo local nem de mínimo local de f.

1.4. Concavidade

1.4.1. Definição

Seja f uma função contínua no intervalo $I = [a,b]$ e derivável no ponto $x_0 \in]a,b[$. Dizemos que o gráfico de f tem <u>concavidade positiva</u> (ou para cima) em x_0 se, e somente se, existe uma vizinhança V de x_0 tal que, para $x \in V$, os pontos do gráfico de f estão acima da reta tangente à curva no ponto x_0.

Analogamente, se existe uma vizinhança V de x_0 tal que, para $x \in V$, os pontos do gráfico de f estão abaixo da reta tangente à curva no ponto x_0, dizemos que o gráfico de f tem <u>concavidade negativa</u> (ou para baixo).

1.4.2. Teorema

Se f é uma função derivável até segunda ordem no intervalo $I = [a,b]$, x_0 é interno a $[a,b]$ e $f''(x_0) \neq 0$, então:

- Quando $f''(x_0) > 0$, o gráfico de f tem concavidade positiva (ou para cima) em x_0.
- Quando $f''(x_0) < 0$, o gráfico de f tem concavidade negativa (ou para baixo) em x_0.

1.5. Ponto de inflexão

1.5.1. Definição

Seja f uma função contínua no intervalo $I = [a,b]$ e derivável no ponto $x_0 \in]a,b[$. Dizemos que $P_0(x_0, f(x_0))$ é um ponto de inflexão do gráfico de f se, e somente se, existe uma vizinhança V de x_0 tal que nos pontos do gráfico f para $x \in V$ e $x < x_0$ a concavidade tem sempre o mesmo sinal, que é contrário ao sinal da concavidade nos pontos do gráfico para $x > x_0$.

1.5.2. Teorema

Seja f uma função com derivadas até terceira ordem em $I =]a,b[$. Seja $x_0 \in]a,b[$. Se $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \neq 0$, então x_0 é abcissa de um ponto de inflexão.

Obs: $f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$ nada se pode concluir.

1.5.3. Teorema

Se f é uma função derivável até segunda ordem em $I =]a,b[$, $x_0 \in]a,b[$ e x_0 é abcissa de ponto de inflexão do gráfico de f, então $f''(x_0) = 0$.

1.6. Variação das funções

Para caracterizar como varia uma função f, procuramos determinar:

1. o domínio;
2. os pontos de descontinuidade;
3. as intersecções do gráfico com os eixos x e y;
4. o comportamento no infinito;
5. o crescimento ou decréscimo;
6. os extemantes;
7. os pontos de inflexão e a concavidade;
8. o gráfico.

1.6.1. Exemplo

Estudar a variação da função $f(x) = x^3 + x^2 - 5x$.

1. o domínio: $D(x) = R$.
2. os pontos de descontinuidade: a função polinomial é contínua em R.
3. as intersecções do gráfico com os eixos x e y:

Para $x=0$, temos $f(x)=0$. Ponto $P(0,0)$

Para $y=f(x)=0$:

$x^3+x^2-5x=0$

$x(x^2+x-5)=0$

$x=0$ ou $x^2+x-5=0$

$x^2+x-5=0$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=1^2-4.1.(-5)$

$\Delta=21$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$$

As raízes são:

$x'=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$ e $x''=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$

Pontos $Q(\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2},0)$ e $R(\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2},0)$

4.o comportamento no infinito: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

5. o crescimento ou decréscimo;

Cálculo da primeira derivada: $f'(x)=3x^2+2x-5$

Resolvendo a equação $f'(x)=0$:

$3x^2+2x-5=0$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=2^2-4.3.(-5)$

$\Delta=4+60$

$\Delta=64$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{64}}{2.3}$$

As raízes são:

$x'=\dfrac{-2+8}{6}=1$ e $x''=\dfrac{-2-8}{6}=-\dfrac{10}{6}=-\dfrac{5}{3}$

Analisando o comportamento da derivada primeira $f'(x)=3x^2+2x-5$:

	$x''=-\frac{5}{3}$		$x'=1$	
$+$	|	$-$	|	$+$

Portanto:

$x\le-\dfrac{5}{3}$ ou $x\ge1$, temos $f'(x)\ge0$. Logo f é crescente

$-\dfrac{5}{3}\le x\le1$, temos $f'(x)\le0$. Logo f é decrescente

6. os extremantes;

Cálculo da segunda derivada: $f''(x) = 6x + 2$

Substituindo as raízes da derivada primeira $x' = 1$ e $x'' = -\frac{5}{3}$, na função derivada segunda:

$$f''(x) = 6x + 2$$
$$f''(1) = 6.1 + 2 = 8$$

Logo, para $x = 1$, temos $f''(x) > 0$

$$f''(x) = 6x + 2$$
$$f''(-\frac{5}{3}) = 6.(-\frac{5}{3}) + 2 = -\frac{30}{3} + 2 = -\frac{30+6}{3} = -\frac{24}{3} = -8$$

Logo, para $x = -\frac{5}{3}$, temos $f''(x) < 0$

Conclusão: a função f tem um ponto de mínimo em $x = 1$ e um ponto de máximo em $x = -\frac{5}{3}$. Substituindo as raízes da derivada primeira em f, temos os pontos $S(1, -3)$ e $T(-\frac{5}{3}, \frac{175}{27})$.

7. os pontos de inflexão e concavidade;

Resolvendo a equação $f''(x) = 0$:
$$6x + 2 = 0$$
$$x = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Analisando o comportamento da derivada segunda $f''(x) = 6x + 2$:

$x = -\frac{1}{3}$

$-$ | $+$

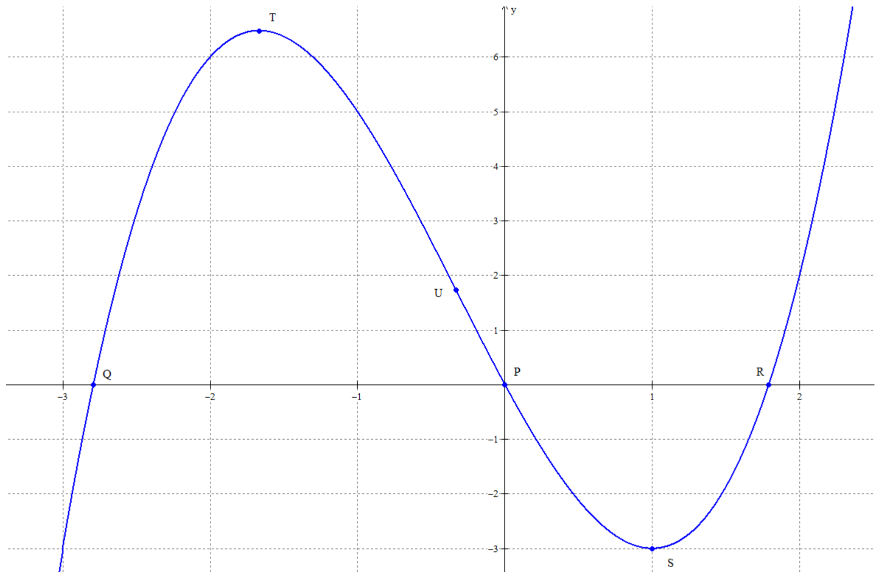
Portanto:

$x < -\frac{1}{3}$, temos $f''(x) < 0$. Logo a concavidade de f é negativa

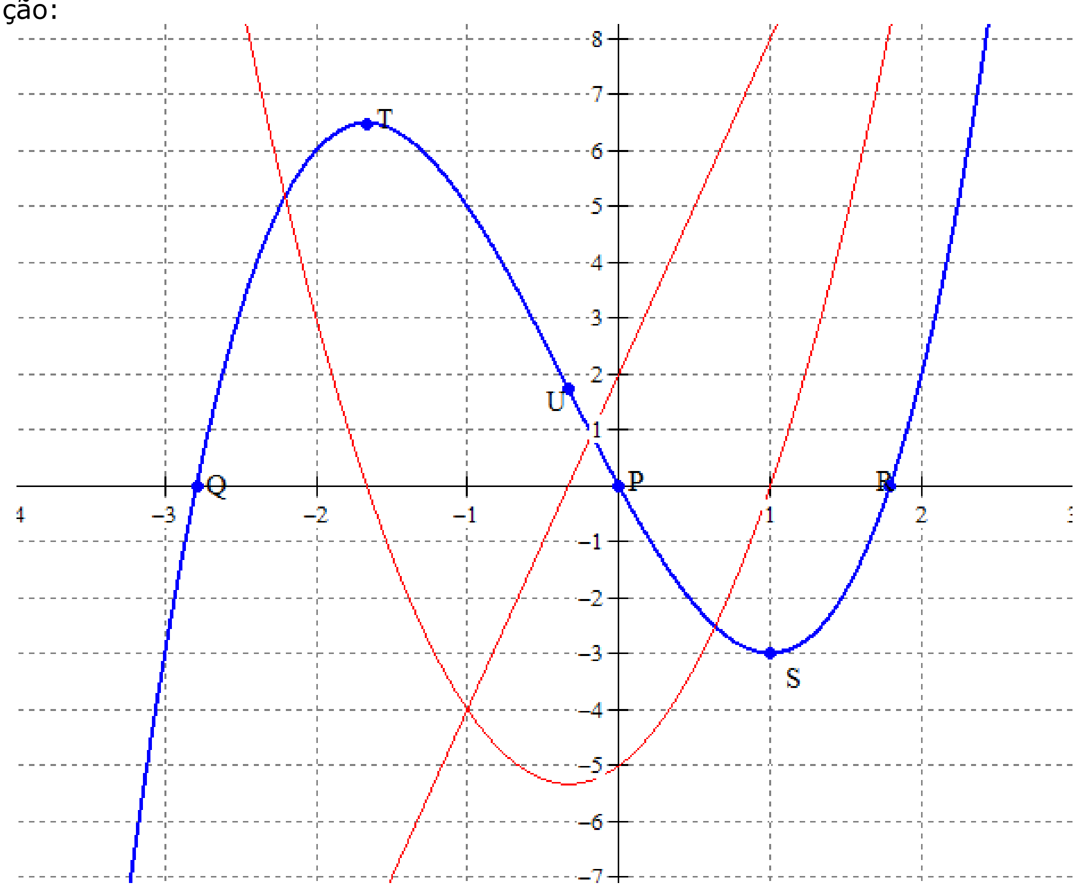
$x > -\frac{1}{3}$, temos $f''(x) > 0$. Logo a concavidade de f é positiva

Em $x = -\frac{1}{3}$ há um ponto de inflexão. Substituindo a raiz da derivada segunda em f temos o ponto $U(-\frac{1}{3},\frac{47}{27})$.

7. gráfico



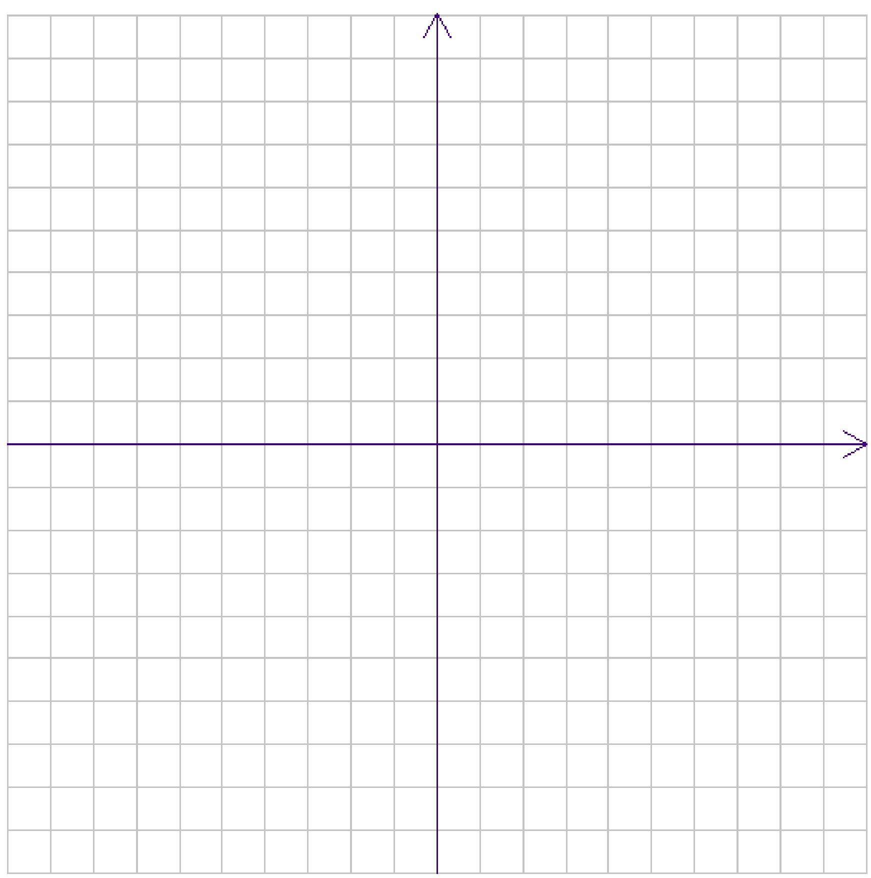
Verificação:



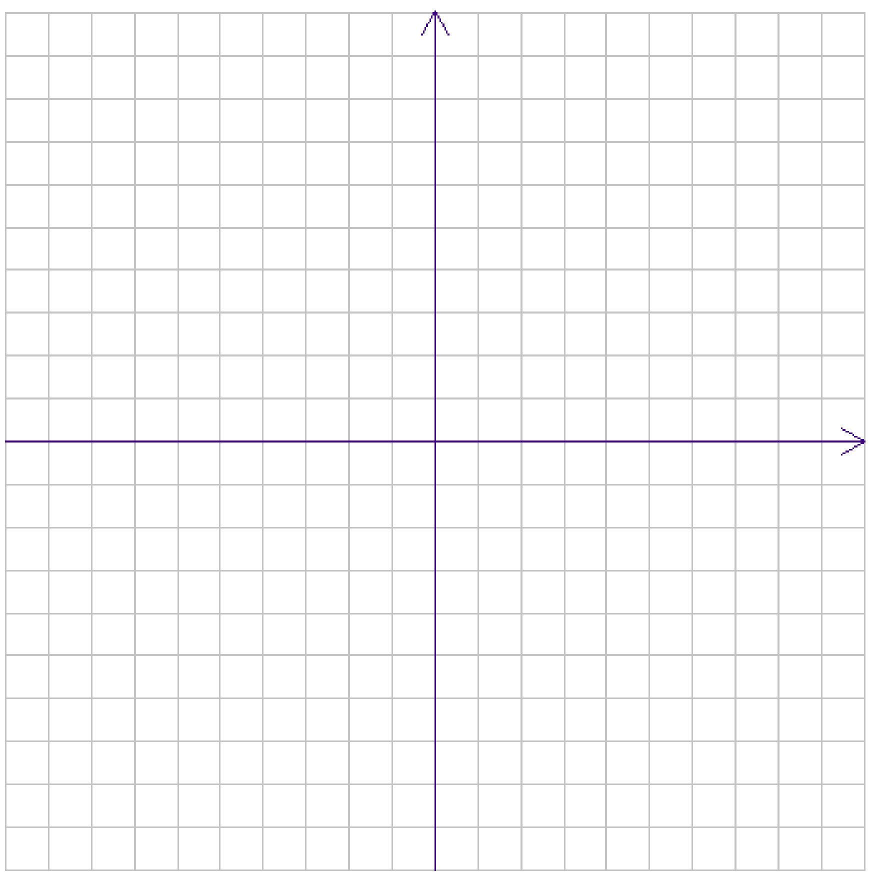
1.6.2. Exercícios

Estudar a variação das funções:

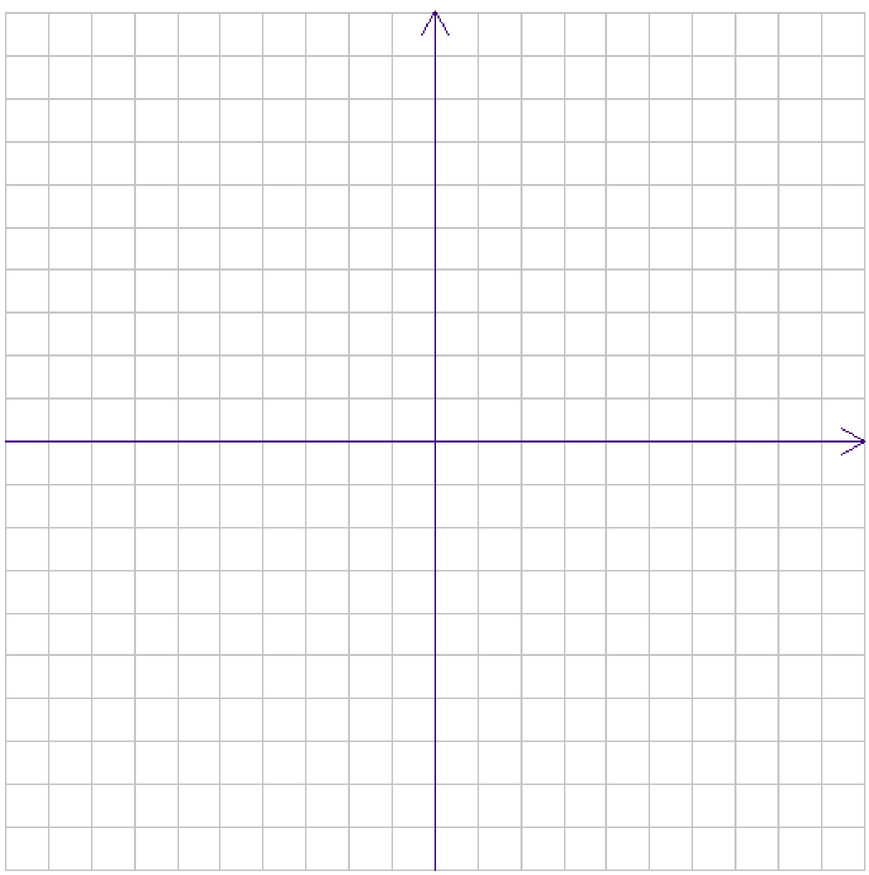
1. $f(x) = 2x^4 - 6x^2$



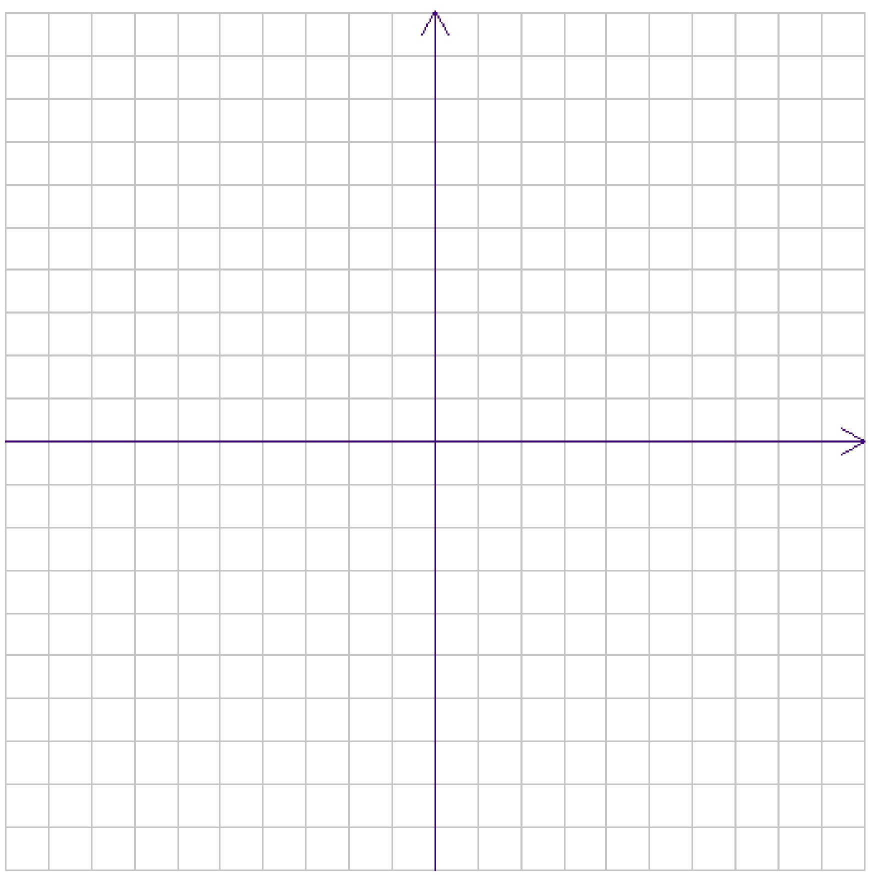
2. $f(x) = 2x^3 - 6x$



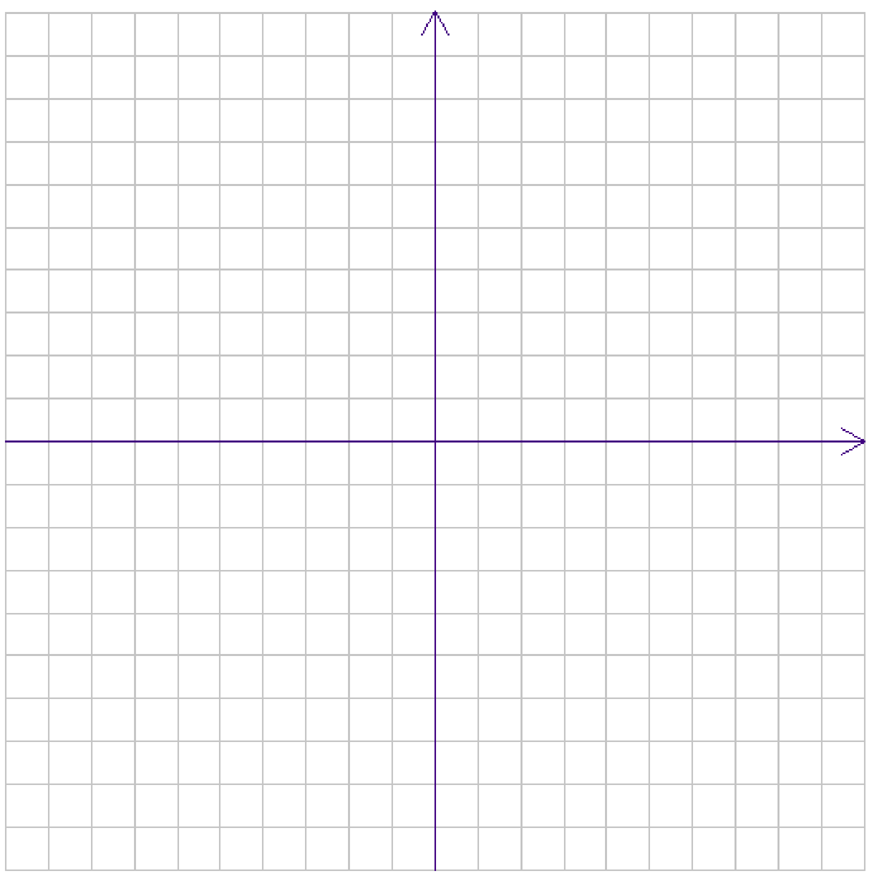
3. $f(x) = 4x^3 - x^2 - 24x - 1$



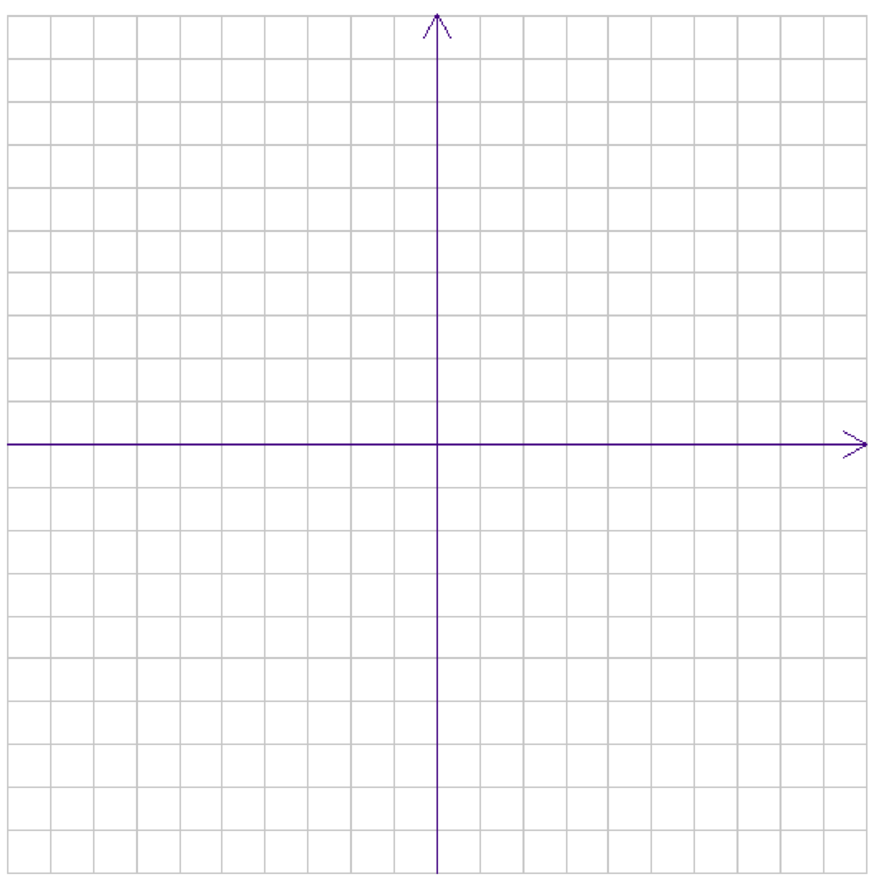
4. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}\,,\ \ x\neq 3$



5. $f(x)=\dfrac{x-1}{2x-5}$, $x\neq\dfrac{5}{2}$

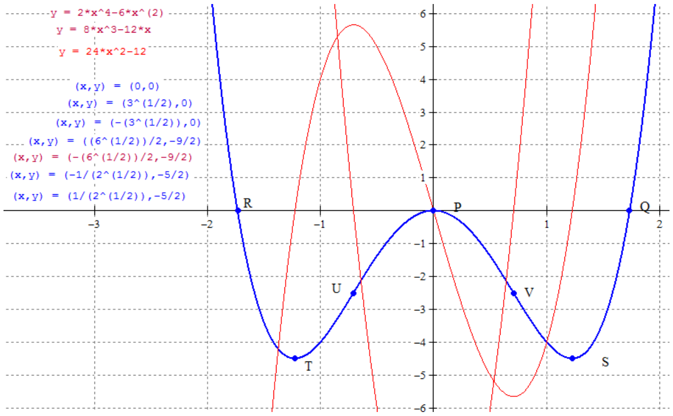


6. $f(x) = x^4 - 2x^3$

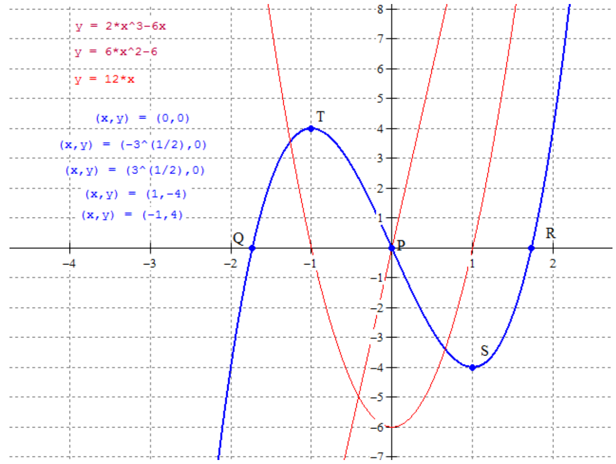


Respostas:

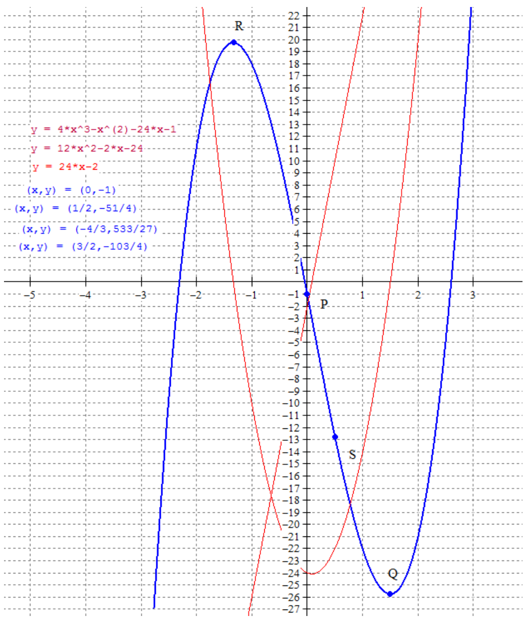
1.



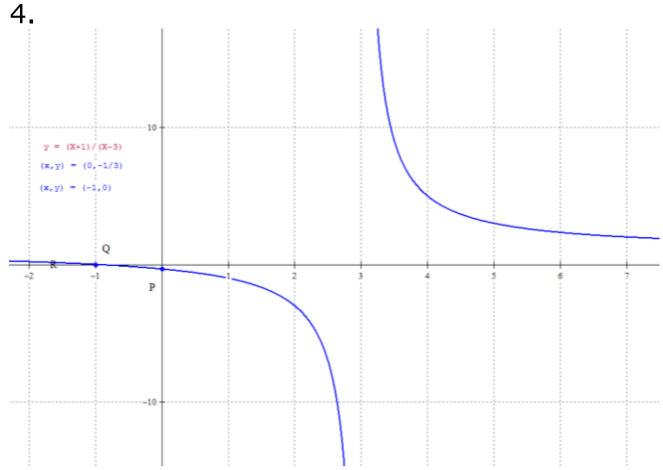
2.



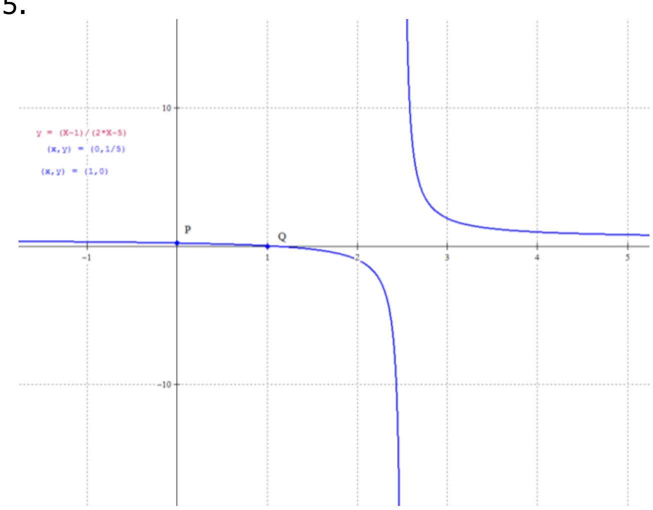
3.



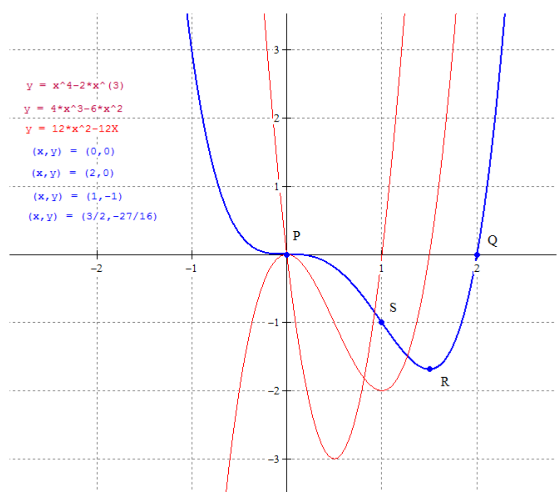
4.



5.



6.



2. Problemas de Otimização

2.1.1. Teorema de Fermat

Se $f: D \to R$ é uma função derivável no ponto $x_o \in D$ e x_o é ponto extremo local interior de f, então $f'(x_o) = 0$.

Interpretação geométrica: num extremo local interior de uma função derivável f, a reta tangente ao gráfico de f é paralela ao eixo dos x.

2.1.2. Teorema

Seja f uma função contínua e derivável até segunda ordem no intervalo $I =]a,b[$, com derivadas f' e f'' também contínuas em I. Seja $x_0 \in I$ tal que $f'(x_0) = 0$. Nessas condições, temos:

- Se $f''(x_0) < 0$, então x_0 é ponto de máximo local de f.
- Se $f''(x_0) > 0$, então x_0 é ponto de mínimo local de f.

2.1.3. Verificação

Analise o comportamento da função $f(x) = x^3 - 3x$.

a. Calcular a derivada primeira: $f'(x) = 3x^2 - 3$

b. Igualar $f'(x) = 0$ e resolver a equação para identificar os pontos críticos de f:

$$f'(x) = 0$$
$$3x^2 - 3 = 0$$
$$x^2 = \frac{3}{3}$$
$$x = \sqrt{1}$$
$$x = \pm 1$$

c. calcular os pontos críticos de f:

$$f(x) = x^3 - 3x \qquad f(x) = x^3 - 3x$$
$$f(1) = 1^3 - 3.1 \qquad f(-1) = (-1)^3 - 3.(-1)$$
$$f(1) = -2 \qquad f(-1) = -1 + 3$$
$$f(-1) = 2$$

$S(1,-2)$ $\qquad$ $T(-1,2)$

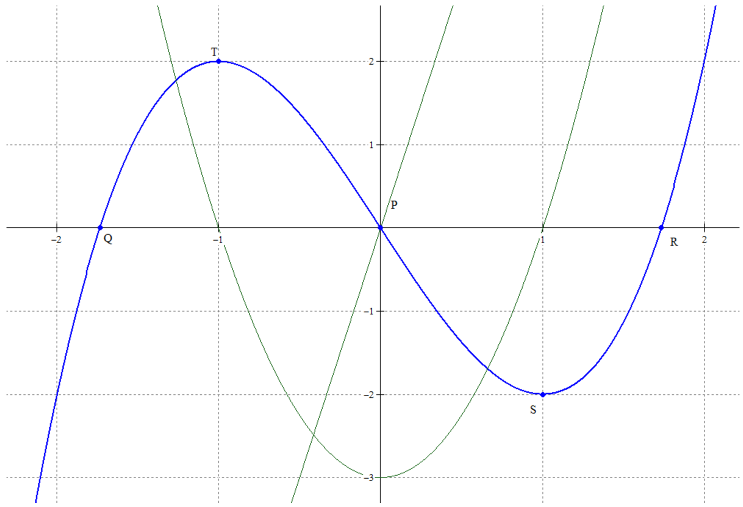
c. Calcular a derivada segunda: $f''(x) = 6x$

d. Substituir as raízes da derivada primeira na função derivada segunda:
$f''(1) = 6.1 = 6 > 0$

$f''(-1)=6.(-1)=-6<0$

e. Análise da derivada segunda:
$f''(1)>0$, o ponto é ponto de mínimo.
$f''(-1)<0$, o ponto é ponto de máximo.

g. Gráfico:



2.1.4. Aplicação

1. Achar dois números positivos cuja soma seja 70 e cujo produto seja o maior possível.

$x+y=70$ e $P=x.y$

a.Escrever a função P em função de x:

$x+y=70$

$y=70-x$

$P=x.y$

$P(x)=x.(70-x)$

$P(x)=70x-x^2$

b.Calcular a derivada primeira de $P(x)$:

$P(x)=70x-x^2$

$P'(x)=70-2.x$

c.Igualar $P'(x)=0$ e resolver a equação para identificar os pontos críticos da função:

$P'(x)=0$

$70-2x=0$

$-2x=-70$

$x=\dfrac{70}{2}$

$x=35$

d. Calcular o valor de y:

$y = 70 - x$

$y = 70 - 35$

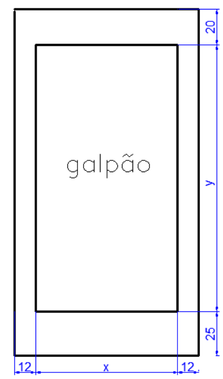
$y = 35$

e. Calcular a derivada segunda: $P''(x) = -2$

f. Análise da derivada segunda:

$f''(-2) < 0$, o ponto é ponto de máximo.

Resposta: os números que maximizam o valor do produto P são 35 e 35.



2. Um galpão deve ser construído tendo uma área retangular de 12100 m². A prefeitura exige que exista um espaço livre de 25 m na frente, 20 m atrás e 12 m em cada lado. Encontre as dimensões do lote que tenha a área mínima na qual possa ser construído este galpão.

$A_1 = x.y$

$12100 = x.y$

$A = b.h$

$A = (12 + x + 12).(20 + y + 25)$

$A = (24 + x).(45 + y)$

a.Escrever a função A em função de x:

$12100 = x.y$

$y = \dfrac{12100}{x}$

$A = (24 + x).(45 + y)$

$A(x) = (24 + x).(45 + \dfrac{12100}{x})$

$A(x) = 1080 + \dfrac{290400}{x} + 45x + \dfrac{12100x}{x}$

$A(x) = 1080 + \dfrac{290400}{x} + 45x + 12100$

$A(x) = 13180 + \dfrac{290400}{x} + 45x$

b. Calcular a derivada primeira de $A(x)$:

$$A(x) = 13180 + \frac{290400}{x} + 45x$$

$$A'(x) = -290400x^{-2} + 45$$

$$A'(x) = -\frac{290400}{x^2} + 45$$

$$A'(x) = \frac{-290400 + 45x^2}{x^2}$$

c. Igualar $A'(x)=0$ e resolver a equação para identificar os pontos críticos da função:

$$A'(x)=0$$
$$\frac{-290400+45x^2}{x^2}=0$$
$$-290400+45x^2=0$$
$$45x^2=290400$$
$$x^2=\frac{290400}{45}$$
$$x\cong 80,33$$

d. Calcular o valor de y:

$$y=\frac{12100}{x}$$
$$y=\frac{12100}{80,33}$$
$$y\cong 150,62$$

e. Calcular a derivada segunda:

$$A'(x)=\frac{-290400+45x^2}{x^2}=-290400.x^{-2}+45$$
$$A''(x)=(-2).(-290400).x^{-3}$$
$$A''(x)=\frac{580800}{x^3}$$

f. Calcular o valor da derivada segunda no ponto x:

$$A''(x)=\frac{580800}{x^3}$$
$$A''(80,33)=\frac{580800}{(80,33)^3}$$
$$A''(80,33)\cong 1,12$$

g. Análise da derivada segunda:

$f''(80,33)>0$, o ponto é ponto de mínimo.

h. Cálculo das dimensões, em m, do terreno: largura: $12+80,33+12=103,33$ e profundidade: $20+150,62+25=196,62$.

Resposta: a área do terreno é mínima quando suas dimensões forem, aproximadamente, 104,33m e 196,62m.

2.1.5. Exercícios

1. Achar dois números positivos cuja soma é 16 e o produto é o máximo possível.

2. Um jardim retangular de $50m^2$ de área deve ser protegido contra animais. Se um lado do jardim já está protegido por uma parede de celeiro, quais as dimensões da cerca de menor comprimento?

3. Uma página para impressão deve conter 300 cm^2 de área impressa, uma margem de 2 cm nas partes superior e inferior e uma margem de 1,5 cm nas laterais. Quais são as dimensões da página de menor área que preenche essas condições?

4. Uma folha de papel contém 375 cm^2 de matéria impressa, uma margem superior de 3,5 cm, margem inferior de 2 cm, margem lateral direita de 2 cm e margem lateral esquerda de 2,5 cm. Determine quais devem ser as dimensões da folha para que haja o máximo de economia de papel?

5. Um fabricante ao comprar caixas de embalagens, retangulares, exige que o comprimento de cada caixa seja 2m e o volume 3 m^3. Para gastar a menor quantidade de material possível na fabricação das caixas, quais devem ser suas dimensões?

6. Um fabricante precisa produzir caixas de papelão, com tampa, tendo na base um retângulo com comprimento igual ao triplo da largura. Calcule as dimensões que permitem a máxima economia de papelão para produzir caixa de volume V dado e igual a 36 m^3.

Respostas:

1. 8 e 8
2. 5m e 10m
3. 18 cm e 24 cm
4. 22,01 cm e 26,91 cm
5. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ m, 2 m e $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ m
6. 2m, 3m e 6m

3. Anexos

3.1. Tabela de Derivadas

	DERIVADAS	
01	função constante	$f(x)=c \Rightarrow f'(x)=0$, $c \in R$
02	função potência $f(x)=x^n$, $n \in N^*$	$f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=n.x^{n-1}$
03	função exponencial $f(x)=a^x$, $a \in R$	$f(x)=a^x \Rightarrow f'(x)=a^x.\ln a$, $a \in R$ e $0<\alpha \neq 1$
04	função exponencial de base e, $f(x)=e^x$	$f(x)=e^x \Rightarrow f(x)'=e^x$
05	função seno	$f(x)=senx \Rightarrow f'(x)=\cos x$
06	função cosseno	$f(x)=\cos x \Rightarrow f'(x)=-senx$
07	função tangente x	$f(x)=tgx \Rightarrow f'(x)=\sec^2 x$
08	função cotangente x	$f(x)=cotgx \Rightarrow f'(x)=-\cos\sec^2 x$
09	função secante x	$f(x)=\sec x \Rightarrow f'(x)=\sec x.tgx$
10	função cossecante x	$f(x)=\cos\sec x \Rightarrow f'(x)=-\cos secx.\cot gx$
11	função logarítmica	$f(x)=\log_a x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x.\ln a}$, $a>0$ e $a \neq 1$
12	função logarítmica de base e	$f(x)=\ln x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$
13	função potência $f(x)=x^n$, com expoente real, $n \in R$ e $x>0$	$f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=n.x^{n-1}$
14	função arco seno x	$f(x)=arcsenx \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15	função arco cosseno x	$f(x)=\arccos x \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16	função arco tangente x	$f(x)=arctgx \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$
	DERIVADAS DE FUNÇÕES COMPOSTAS	
17	função $f(x)=[u(x)]^n$, $n \in Z$	$f(x)=[u(x)]^n \Rightarrow f'(x)=n.[u(x)]^{n-1}.u'(x)$
18	função exponencial com $a>0$ e $a \neq 1$.	$f(x)=a^{u(x)} \Rightarrow f'(x)=a^{u(x)}.\ln a.u'(x)$
19	função exponencial de base e	$f(x)=e^{u(x)} \Rightarrow f'(x)=e^{u(x)}.u'(x)$
20	função logarítmica	$f(x)=\log_a u(x) \Rightarrow f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x).\ln a}$
21	função logarítmica de base e	$f(x)=\ln u(x) \Rightarrow f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$
22	função $f(x)=u(x)^{v(x)}$	
	$f(x)=u(x)^{v(x)} \Rightarrow f'(x)=v(x).u(x)^{v(x)-1}.u'(x)+u(x)^{v(x)}.\ln u(x).v'(x)$	
23	função seno x	$f(x)=sen(u(x)) \Rightarrow f'(x)=cos(u(x)).u'(x)$
24	função cosseno x	$f(x)=\cos(u(x)) \Rightarrow f'(x)=-sen(u(x)).u'(x)$
25	função tangente x	$f(x)=tg(u(x)) \Rightarrow f'(x)=-\sec^2(u(x)).u'(x)$
26	função cotangente x	$f(x)=\cot g(u(x)) \Rightarrow f'(x)=\cos sec^2(u(x)).u'(x)$

27	função secante x	$f(x)=\sec(u(x))\Rightarrow f'(x)=tg(u(x)).\sec(u(x)).u'(x)$
28	função cossecante x	$f(x)=\cos\sec(u(x))\Rightarrow f'(x)=\cos\sec(u(x)).\cot g(u(x)).u'(x)$

REGRAS DE DERIVAÇÃO		
01	Derivada do Produto de uma constante c, $c\in R$, por uma função	$f(x)=c.v(x)\Rightarrow f'(x)=c.v'(x)$
02	Derivada da Soma	$f(x)=u(x)+v(x)\Rightarrow f'(x)=u'(x)+v'(x)$
03	Derivada da Diferença	$f(x)=u(x)-v(x)\Rightarrow f'(x)=u'(x)-v'(x)$
04	A derivada da soma (ou diferença) pode ser estendida para uma soma de n funções: $f(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)\Rightarrow f'(x)=u_1'(x)+u_2'(x)+...+u_n'(x)$	
05	Derivada do Produto	$f(x)=u(x).v(x)\Rightarrow f'(x)=u'(x).v(x)+u(x).v'(x)$
06	A derivada do produto pode ser estendida para um produto de n fatores: $f(x)=u_1(x).u_2(x).....u_n(x)\Rightarrow f'(x)=u_1'(x).u_2(x).....u_n(x)+u_1(x).u_2'(x).....u_n(x)+...+u_1(x).u_2(x).....u_n'(x)$	
07	Derivada do Quociente	$f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{u'(x).v(x)-u(x).v'(x)}{\left[v(x)\right]^2}$, $v(x)\neq 0$

REGRA DA CADEIA	
Se $y=g(u)$, $u=f(x)$, temos $y=g\left[f(x)\right]$	$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}.\dfrac{du}{dx}$

4. Bibliografia

DEMANA et al. *Pré-Cálculo*. Tradução de Aldy Fernandes da Silva e Eliana Crepaldi Uazawa. São Paulo: Pearson, 2009.

IEZZI, G. *Complexos, Polinômios e Equações*. 6 e. São Paulo: Atual, 1993. v.6. Fundamentos de Matemática Elementar.

IEZZI, G. *Trigonometria*. 7 e. São Paulo: Atual, 1993. v.3. Fundamentos de Matemática Elementar.

IEZZI, G; DOLCE, O; MURAKAMI, C. *Logaritmos*. 8 e. São Paulo: Atual, 1993. v.2. Fundamentos de Matemática Elementar.

POOLE, DAVID. *Álgebra Linear I*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

SAFIR, F. *Pré-Cálculo*. 5 ed. Porto Alegre: Bookman, 2003.

